数理解析研究所講究録
637巻 1988年 19-25

Euler limit と磁気流体の singular limit

北大理 上見 練太郎 (Rentaro Agemi)

磁気流体の方程式系を無次元化すると二つのパラメーター，Mach 数と Alfven 数，を含む方程式系を得る．本稿ではそれらのパラメータを小さくしたとき，解のみたすべき方程式がどのようなものであるか議論する．

磁気流体の方程式系は

$$\rho_p(\partial_t + v\cdot\nabla)p + \rho\,\mathrm{div}\, v = 0,$$

$$\rho(\partial_t + v\cdot\nabla)v + \nabla p + \mu_0 H\times \mathrm{rot}\, H = 0,$$

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)S = 0,$$

$$\partial_t H - \mathrm{rot}(v\times H) = 0, \qquad \mathrm{div}\, H = 0,$$

$$p = R\rho^\gamma \exp((\gamma-1)S) \quad (\gamma > 1)$$

で，圧力 $p(t,x)$，速度場 $v(t,x)$，エントロピー $S(t,x)$，磁場 $H(t,x)$ を未知とみて，密度 ρ は最後の状態方程式できまるものとみる．ここで，$\rho_p = \partial\rho/\partial p$ である．

(註) S が定数でないとき，ρ を未知とみると上の方程

式系は一階の対称微分方程式系にはならない．

無次元化を行うために，v_mを代表的な速度場（定数）等として，

$$\bar{v} = v/|v_m| \ , \ \bar{p} = p/p_m \ , \ \bar{S} = S - S_m \ ,$$
$$\bar{H} = H/|H_m| \ , \ \bar{t} = |v_m| t/L \ , \ \bar{x} = x/L$$

とおくと，$\bar{v}$ 等を再び v 等で表わすとき上の方程式系は

$$\rho_p (\partial_t + v\cdot\nabla) p + p \operatorname{div} v = 0 \ ,$$
$$\rho (\partial_t + v\cdot\nabla) v + \lambda^2 \nabla p + \alpha^2 H \times \operatorname{rot} H = 0 \ ,$$
$$(\partial_t + v\cdot\nabla) S = 0$$
$$\partial_t H - \operatorname{rot}(v \times H) = 0 \ , \quad \operatorname{div} H = 0 \ ,$$
$$p = R' \rho^{\gamma} \exp((\gamma-1)S)$$

となる．ここで，λ, α は各々 Mach 数 M，Alfven 数 A の逆数で，

$$M^2 = \frac{|v_m|^2}{P_p(\rho_m, S_m)} \ , \qquad A^2 = \frac{|v_m|^2 \rho_m}{\mu_0 |H_m|^2} \ .$$

この方程式を初期条件

$$v(0,x) = v_0(x) \ , \ p(0,x) = p_0(x) \ ,$$
$$S(0,x) = S_0(x) \ , \ H(0,x) = H_0(x)$$

のもとで考え十分滑らかとする．境界値問題を考えるときは領域Ωの境界$\partial\Omega$で

$$v\cdot n = 0 \ , \qquad H\cdot n = 0$$

を課すものとする．ここで，n は Ω の外向き単位法ベクトルとする．

最初に，$\lambda \to \infty$（$M \to 0$）のときの極限を考える．これは力学では非圧縮極限として知られていたが，数学として証明されたのは1980年代に入ってからである．

(1) $H \equiv 0$，$S=$ 定数の場合．

初期値が $\rho_0 =$ 定数，$\operatorname{div} v_0 = 0$ をみたすとする．このとき，$(v^\lambda, p^\lambda, \lambda^2 \nabla p^\lambda)$ の極限が存在 $(v^\infty, \rho_0, \nabla p^\infty)$ して，非圧縮Euler方程式

$$\rho_0 (\partial_t + v^\infty \cdot \nabla) v^\infty = - \nabla p^\infty$$

$$\operatorname{div} v^\infty = 0$$

をみたす．

この結果は $\mathbb{R}^3$ 又は periodic のとき D. Ebin [3]，S. Klainerman and A. Majda [5]，内部領域のとき R. Agemi [1]，S. Schochet [6]，外部領域のとき H. Isozaki によって示された．

証明の key は次の一様評価をだすことにある．即ち，λ に依らない定数 T，$K > 0$ があって

$$\lambda (\| p^\lambda(t) - p_0 \|_3 + \| \partial_t p^\lambda(t) \|_2) \leq K ,$$

$$\| v^\lambda(t) \|_3 + \| \partial_t v^\lambda(t) \|_2 \leq K , \quad 0 \leq t \leq T .$$

(註) もとの方程式系は双曲型であったが，非圧縮Euler方程式は双曲型と楕円型の交ったものになっている．

(註) 初期値に $\mathrm{div}\, v_0 = 0$ を課さないとき，$\mathbb{R}^3$（Ukai [7]）や外部領域（Isozaki [4]）では initial layer が表れる．上の収束は [0, T] で一様であるが，この場合 (0, T] で広義一様であり，v^∞ の初期値は $v^\infty(0, x) = P v_0$ となる．ここで P は solenoidal supspace への orthogonal projection である．

(ロ) $H \equiv 0$ の場合

初期値の仮定は(イ)と同じで極限の方程式は（非斉次）非圧縮 Euler 方程式

$$(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla)\rho^\infty = 0,$$

$$\rho^\infty(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla)v^\infty = -\nabla p^\infty$$

$$\mathrm{div}\, v^\infty$$

である．ここでは $(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla)\rho^\infty = 0$ と $(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla)S^\infty = 0$ とは同値であることに注意しておく．この場合，外部領域のときよく分っていない．とくに，initial layler があるかどうか．

(ハ) $H \not\equiv 0$ で Alfven 数が定数の場合．

初期値の仮定は(イ)と同じで極限の方程式系は

$$(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla)\rho^\infty = 0.$$

$$\rho^\infty(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla)v^\infty + \nabla p^\infty + \alpha^2 H^\infty \times \mathrm{rot}\, H^\infty = 0,$$

$$\partial_t H^\infty - \mathrm{rot}(v^\infty \times H^\infty) = 0, \quad \mathrm{div}\, H^\infty = 0,$$

$$\mathrm{div}\, v^\infty = 0.$$

$\mathbb{R}^3$ か periodic のときのみで，境界値問題は元の方程式系

で解の存在さえ証明されていない.

次に, $\alpha \to \infty$ ($A \to 0$) の極限を考える. この場合, この問題自体の適切性も含めてよく分っていないようである.

(ニ) (ハ)の段階で $p^\infty =$ 定数の場合のとき, A が密度に比例する場合を考える. このとき, 方程式系は

$$\alpha^{-2}(\partial_t + v\cdot\nabla)v + \nabla p + \alpha^2 H \times \mathrm{rot}\, H = 0,$$

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)H - H\cdot\nabla v = 0.$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad \mathrm{div}\, H = 0.$$

とみたす. 初期値は $H_0 =$ 定数とする. 結果は α の適当な部分列をとると, $\alpha \to \infty$ のとき

$$(v^\alpha, \nabla p^\alpha, H^\alpha, \alpha^2(H^\alpha - H_0)) \longrightarrow (v^\infty, \nabla p^\infty, H_0, K^\infty)$$

で, 静磁場の方程式

$$H_0 \times \mathrm{rot}\, K^\infty + \nabla p^\infty = 0, \quad H_0\cdot\nabla v^\infty = 0$$

$$\mathrm{div}\, v^\infty = 0. \quad \mathrm{div}\, K^\infty = 0$$

をみたす. (R. Agemi [2])

これは $\mathbb{R}^3$ のみで, 内部(外部)領域の場合, 境界条件のからみで $H_0 \equiv 0$ となるので, simply connected な領域のみ興味ある対象となる. この場合, 初期値に $\mathrm{rot}\, H_0 = 0$ の条件をつけて同様の結果が期待されるが成功していない

(ホ) Mach 数定数の場合, 一般的な状況である結果を得ているが, 十分数学的, 物理的解釈がなされていない.

References.

[1]. R. Agemi: The incompressible limit of compressible fluid motions in a bounded domain, Proc. Japan Acad. vol 57. Ser A, (1981)

[2] ——— : The magnetostatic limit. to appear

[3] D. Ebin : The motion of slightly compressible fluids as a motion with strong constraining force, Ann. Math. vol 105 (1977)

[4] H. Isozaki : Singular limits for compressible euler equation in a exterior domain II. Bodies in a uniform flow, Tech. Report Ser. Hokkaido Univ. (1987)

[5] S. Klainerman and A. Majda : Singular limits of quasilinear systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, Comm. Pure Appl. Math. vol 34 (1981)

[6] S. Schochet : The compressible Euler equations in a bounded domain, Comm. Math. Phys. (1986)

[7] S. Ukai : The incompressible limit and initial layer of compressible Euler equation, J. Math. Kyoto

Univ. vol 26 (1986).